

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1991/92

Oktober/November 1991

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik III

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini. Jawab KESEMUA EMPAT soalan. Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Fungsi penjana untuk polinom Hermite diberi oleh

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

(a) Tunjukkan bahawa

$$(i) H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$$

$$(ii) H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$

$$(iii) H_n'(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x)$$

(40/100)

(b) Dengan itu nilaikan kamiran

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

diberi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \quad \text{jika } n = m$$
$$= 0 \quad \text{jika } m \neq n$$

(60/100)

...2/-

2. (a) Suatu fungsi $f(t)$ dapat dikembangkan sebagai suatu siri Fourier dengan sebutan sinus dan kosinus, iaitu

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

Tunjukkan bahawa pekali-pekali di dalam pengembangan ini diberi oleh

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Perhatikan hubungan berotogon untuk fungsi sinus dan kosinus di dalam selang $-T/2 < t < T/2$ diberi oleh

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \quad m \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{bagi semua } m$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

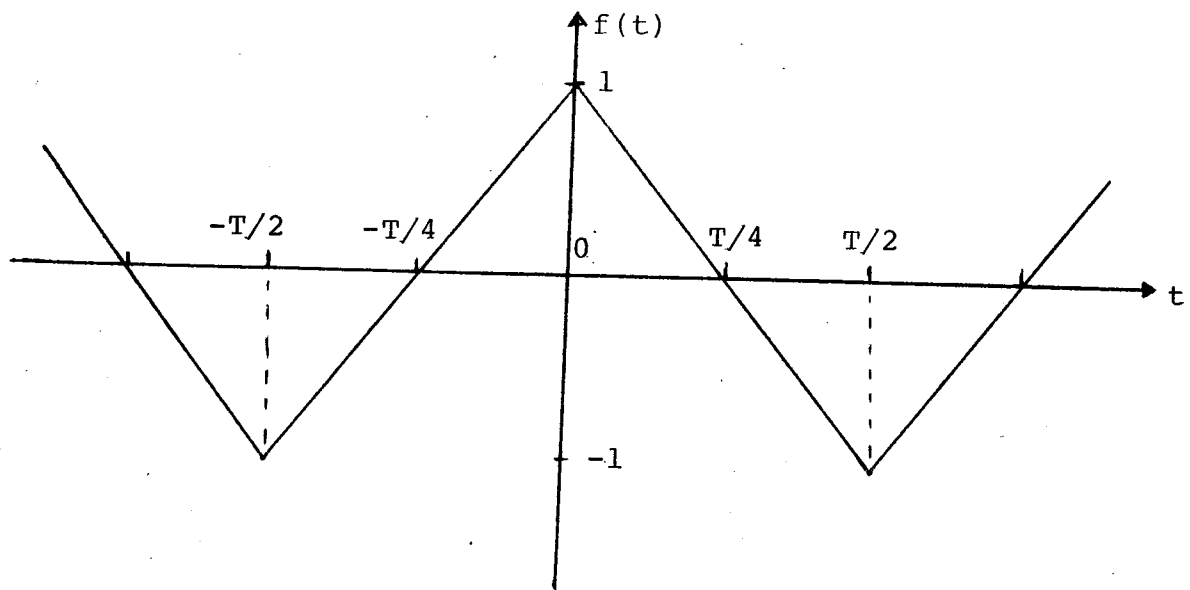
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{bagi semua } m \text{ dan } n$$

di sini $\omega_0 = 2\pi/T$.

(40/100)

...3/-

(b)



Dapatkan Siri Fourier bagi fungsi yang bentuk gelombangnya ditunjukkan di dalam rajah di atas.

(60/100)

3. Suatu plat logam yang berbentuk semibulat mempunyai jejari a . Lilitan plat tersebut dikekalkan pada suhu T^0 , dan besnya dikekalkan pada suhu sifar. Selesaikan persamaan konduksi haba, iaitu

$$k \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

untuk mendapat suhu u di sebarang titik plat pada keadaan mantap.

Perhatikan bahawa ∇^2 di dalam koordinat kutub ialah:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

(100/100)

4. (a) Seutas tali yang panjangnya tak terhingga mempunyai satu hujung $x = 0$ yang pada awalnya di dalam keadaan rehat di atas paksi x . Hujung $x = 0$ mengalami sesaran melintang yang berkala yang diberi oleh

$A_0 \sin \omega_0 t$, $t > 0$. Cari sesaran $Y(x,t)$ bagi sebarang titik di atas tali pada sebarang masa. Gunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan getaran

$$a^2 \nabla^2 Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad x > 0, t > 0$$

di sini a ialah suatu pemalar.

(60/100)

(b) Persamaan pembezaan Legendre ialah

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \textcircled{H}}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d \textcircled{H}}{d\mu} + n(n+1) \textcircled{H} = 0$$

Dengan membezakan persamaan ini m kali merujuk kepada μ dapatkan persamaan pembezaan bersekutu Legendre, iaitu

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \chi}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\chi}{d\mu} + [n(n+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)}] \chi = 0$$

$$\text{di sini } \chi = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m \textcircled{H}}{d\mu^m} (\mu)$$

$\textcircled{H} \equiv P_n(\mu)$ penyelesaian persamaan pembezaan Legendre.

(40/100)

Perhatian:

[Jika $L\{F(t)\} = f(s)$ maka

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - s F^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

di sini $F^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n F(t)}{dt^n}$.]

[Jika D menandakan penggolah d/dx oleh itu $D_y = dy/dx$ lalu, $D^k y = d^k y/dx^k$ maka teorem Leibnitz ialah $D^n(uv) = (D^n u)v + {}^n C_1 (D^{n-1} u)(Dv) + {}^n C_2 (D^{n-2} u)(D^2 v) + \dots + {}^n C_r (D^{n-r} u)(D^r v) \dots u D^n v$.]